İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ / FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

HAREKETLİ SINIR KOŞULLARINDA, VAKUMDA PARÇACIK YARATIMI

BİTİRME TEZİ

Emre S. Taşcı

Fizik Mühendisliği Bölümü Lisans Öğrencisi
994.308

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Neşe Özdemir

Haziran 2000

ÖNSÖZ

Kuantum alan teorisinde önemli bir yere sahip olduğuna inandığımız, "hareketli sınır koşullarında, vakumda parçacık yaratımı" konulu bu tez, konunun temelinde yer alan kavramlara yer verip, aralarındaki bağıntıların çıkarımına ışık tutmayı amaçlamaktadır. Bu sebepten ötürü, II. bölümde, örnek olarak seçilen Robertson-Walker uzayından Minkowskien uzayına geçiş yolları gösterilmiş, ardından limitlerde durgun olan bu uzayda çalışmalar sürdürülmüştür. (1+1) ayna için, önceden Fulling ve Davies (Fulling, S.A., Davies, P.C.W 1976) tarafından çözülmüş olan bir uygulamayı hesap ederken, onların çözümlerinde bir katsayı mertebesindeki hatayı tespit ettiğimize inanıyoruz (bu tezdeki (3.51) dönüştürülmüş yörünge denkleminin 3. bölge denklemi ile ilgili kaynaktaki 402. sayfadaki son bağıntı arasında). Enerji-momentum yoğunluğunun hesaplanmasında alınan türevde sıfır vermesinden ötürü sonuca bir etkisi olmasa da, olası bir karşılaştırma halinde dikkati çekebileceği düşünülerek bu tespiti belirtmeyi uygun gördük).

Çalışma, sonuç kısmında da belirtildiği üzere, aslen, daha detaylı bir konuya hazırlık niteliğindedir. Bu yüzden, yeni düşünceler ileri sürmek yerine, önceki kavramların yorumlanmasına ve bağıntıların elde edilme metotlarının gösterilmesine ağırlık verilmiştir.

Üniversitede geçirdiğim süre boyunca, bana fiziği daha da çok sevdiren, bilim tutkumu sürekli olarak körükleyen değerli hocalarım Doç. Dr. Neşe Özdemir'e, Prof. Dr. Ayşe Erzan'a, Prof. Dr. Mahmut Hortaçsu'ya ve Prof. Dr. İ. Hakkı Erdoğan'a tüm içtenliğimle şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, vermiş olduğum bir aradan sonra, üniversiteyi bitirme kararı almamda en büyük paya sahip olan Bengü Yazıcıoğlu başta olmak üzere, birlikte -bilimsel veya değil- her konuda zevkle fikir alışverişinde bulunmuş olduğum sevgili arkadaşlarım Bora Örçal'a ve Emir Gümrükçüoğlu'ya da yürekten teşekkür ederim.

Bugünlere onlarsız hiçbir surette gelemeyeceğimi bildiğim, bütün zorluklara birlikte göğüs gerdiğimiz annem Dilek Kurtar'a ve ailemin diğer fertlerine, borcumu hiçbir zaman ödeyemeyecek olacağımı bilsem de, minnet duygularım ve hürmetle, bu çalışmayı ithaf ederim.

Emre S. Taşcı,

"994.308"

Haziran 2000

İÇİNDEKİLER

NOTASYONA DAİR AÇIKLAMA ---

Bu çalışmada, anlaşılmayı kolaylaştırmak amacıyla, birkaç adet farklı gösterim kullanılmıştır:

$\boxed{y(x,t) = f(x)e^{i\omega t}}$ örneğinde olduğu gibi, kutu içine alınan eşitlikler, yapılan dönüşümü işaret etmektedir.

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ &= 1 + \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \right) \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

örneğinde olduğu gibi, köşe içine alınan eşitlikler, ara işlemleri göstermektedir, açıklamalardan pek bir şey kaybetmeden atlanabilir.

$p'(x-t)$ fonksiyonundaki gibi, bir türev işaretine sahip olan fonksiyonlarda, türevler, fonksiyonun argümanına göre alınmalıdır.

Denklemlerde, doğal birimler kullanılmıştır. Ayrıca, *konformal zaman* limitlerine karşılık gelen bölgelerinin adları olan *"in"* ve *"out"* terimlerini de çevirmemenin daha uygun olacağını düşündüm.

I. GİRİŞ

Stephan Hawking'in, karadeliklerin ışıma yaptığını gösterdiği makalesi (Hawking, S. 1975), bir anda gözleri –tekrar- büyük birleşik teoriye çevirmişti. Standard Model o zamana kadar bünyesine üç temel etkileşimi almış, fakat kütleçekimin kuantum formülasyonu halâ yapılamamıştı. Hawking'in termodinamik yasalarını kullanarak bulmuş olduğu ışımaya dair sonuçlara aynı yıl içinde Davies, Fulling ve Unruh tarafından da, alan denklemleri kullanılarak ulaşılınca (Davies, P.C.W., Fulling, S.A., Unruh, W.G. 1975), kütleçekimin kuantum teorisinin nihayetinde tam olarak anlaşılabileceği düşünülmüştü. O günden bu yana, bu konudaki çalışmalar, giderek artan bir hızda devam etmektedir (burada, vakumda parçacık yaratımının aslında, kuvvet etkisi formunda, 1948'te (Casimir, H.B.G. 1948) formüle edildiğini belirtmek uygun düşer). Hareketli bir aynanın, uzaya negatif enerji akısı sağlayabileceğinden yola çıkan Davies ve Ford (Davies, B. 1972; Ford, L.H. 1978), bu akının bir cismin soğutulmasında kullanıldığı takdirde, termodinamiğin ikinci yasasının ihlali üzerine bir tartışma başlattılar. 1994 yılında, Anderson (Anderson, W.G. 1994), bu tartışmadan yola çıkarak "Geroch düşünce deneyi" adı verilen bir tasarıma açıklama getirdi: bu deneyde, çeperleri ayna ile kaplı bir kutu, içine ışınım hapsedildikten sonra yavaşça bir kara deliğe gönderiliyordu. Unruh ve Wald'ın bu konudaki önceki çalışmaları (Unruh, W.G., Wald, R.M. 1982) kutunun bir çeşit kaldırma kuvvetinin etkisiyle, kara deliğin üzerinde "yüzeceğini" öngörüyordu. Eğri uzay zamanda kuantum alan teorisi, temelde üç bölüme ayrılabilir: uzay metriğinin değişmesinden doğan alanlar, bir yansıtıcının varlığındaki değişimler ve bir yutucunun (kara delik) varlığındaki değişimler. Biz, bu tezin II. bölümünde değişen bir uzay metriğinin mevcudiyetinde alan fonksiyonlarının bulunmasını inceledik. Burada, konformal bir dönüşümle uzayı limitlerde durgun bir hale getirdik ve çözümlerimizi buna göre yaptık. Ayrıca Bogolubov katsayılarının hesaplanması da bu bölümde gösterilmektedir. III. bölümde, (1+1) boyutta ilerleyen bir noktasal aynanın yol açtığı parçacık yaratımını ve enerji-momentum tansörü vasıtasıyla, akı hesabının yapılması anlatılmaktadır. "Nokta-bölme" metodunun prensipleri ve uygulamasına da yer verilmiştir. IV. bölüm, II. ve III. bölümlere nazaran, bir giriş bölümü niteliğindedir. Bu bölümde, Hadasz ve arkadaşları tarafından incelenen, fakat, ele aldığı sistemin basitliğinden ötürü, bir uygulama olma yanı ağır basan, küresel ayna problemi tanıtılmış, III. bölümle olan benzerliklere işaret edildikten sonra, çözüm konusunda yol gösterilmiştir.

II. 1+1 UZAYDA GENEL ÇÖZÜMLER --

Bir uzayda, Minkowskien *in* ve *out* bölgelerinde (yani konformal zamanın, sırasıyla, $-\infty$ ve $+\infty$ limitlerinde) parçacık yaratımının nasıl olacağını, iki boyutlu, uzunluk elemanı ds'in

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\,\mathrm{d}x^2 \tag{2.1}$$

bağlantısıyla genişleyen (veya daralan) bir Robertson-Walker evreninde inceleyelim. Minkowskien uzaya geçebilmek için

$$\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}t}{a} \tag{2.2}$$

bağıntısıyla, *konformal zaman* η'yı tanımlayalım. Böylece (2.1) denklemi:

$$t = \int^t \mathrm{d}t' = \int^\eta a(\eta')\mathrm{d}\eta' \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}x^2\right) \tag{2.3}$$

haline gelir. $C(\eta) = a^2(\eta)$ olarak *konformal ölçek faktörü* tanımlanırsa, uzunluk elemanı ds'in bağıntısı çok daha sade bir şekil alır:

$$\mathrm{d}s^2 = C(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}x^2\right) \tag{2.4}$$

Uzunluk elemanının elde ettiğimiz bu şekli, artık tümüyle Minkowski uzayına konformal haldedir.

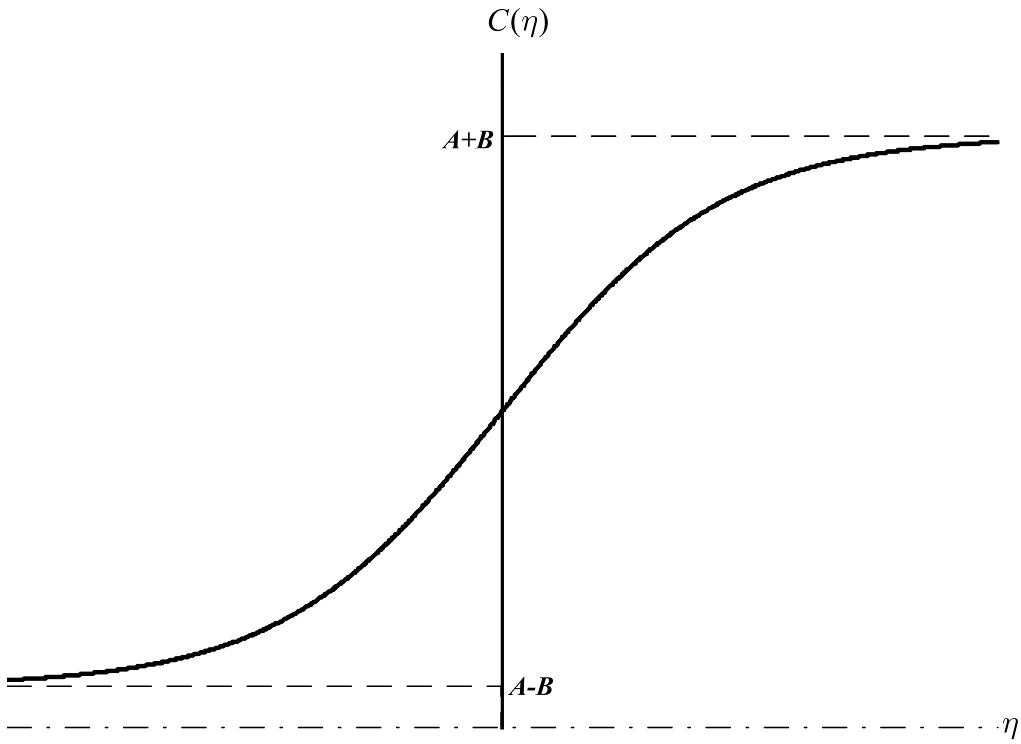
Uzayımızı sonlu bir bölgede temsil edebilmek için, yani bir başka deyişle Penrose diyagramını çizebilmek için, $C(\eta)$ ölçek faktörümüze bir dönüşüm uygulayalım.

$$C(\eta) = A + B\tanh\rho\eta \tag{2.5}$$

denirse, $C(\eta)$'nın η'ya bağlılığı ve limitleri şu şekilde olacaktır:

$$C(\eta) \rightarrow A \pm B, \quad \eta \rightarrow \pm\infty \tag{2.6}$$

grafikten ve (2.6) limitlerinden de görüleceği üzere, bu dönüşüm altında artık uzayımız, düzgün biçimde genişleyen (daralan), asimptotik olarak durgun hale giden Minkowskien uzay-zamana dönüşür.



Sistemimizin metriği, Minkowski metriğinden $C(\eta)$ faktörü kadar farklıdır. Açık olarak yazarsak:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} C(\eta) & 0 \\ 0 & -C(\eta) \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/C(\eta) & 0 \\ 0 & -1/C(\eta) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\det g_{\mu\nu} \equiv g = -C^2(\eta) \tag{2.8}$$

d'Alembertian tanımından:

$$\begin{aligned} \Box &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left\{g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\right\} = \frac{1}{C(\eta)}\partial_\mu\left\{g^{\mu\nu}C(\eta)\partial_\nu\right\} \\ (1+1)\text{ boyutta: } \Box &= \frac{1}{C(\eta)}\partial_\eta^2 - \frac{1}{C(\eta)}\partial_x^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Böylelikle Klein-Gordon denklemi:

$$\left(\Box + m^2\right)\Phi = \left\{-\partial_x^2 + \partial_\eta^2 + C(\eta)\, m^2\right\}\Phi = 0 \tag{2.10}$$

şeklini alacaktır.

$C(\eta)$ *konformal ölçek faktörü*, x'in fonksiyonu olmadığından, alan fonksiyonu, konumsal öteleme simetrisine sahiptir ve Φ alan fonksiyonu, çarpanlarına ayrılabilir; bu ayırmayı yaparken, x değişkeninin ait olduğu fonksiyonu eksponansiyel olarak alarak, diferansiyel denklemimizi sadece η'ya ait bir forma getirmeyi amaçlayarak

$$\boxed{\Phi = e^{ikx}\chi_k(\eta)} \tag{2.11}$$

şeklinde çözümler arayalım. Bu durumda (2.10) denklemi

$$\cancel{e}^{-ikx}\frac{\mathrm{d}^2\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + k^2\cancel{e}^{-ikx}\chi_k(\eta) + C(\eta)\,m^2\cancel{e}^{-ikx}\chi_k(\eta) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 + C(\eta)\,m^2\right)\chi_k(\eta) = 0 \tag{2.12}$$

haline indirgenir. (2.6) dönüşümü hatırlanacak olursa:

$$\boxed{C(\eta) = A + B\,\tanh\rho\eta}$$

ve bu dönüşüm (2.12)'de kullanılırsa:

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 + \left(A + B\,\tanh\rho\eta\right)m^2\right)\chi_k(\eta) = 0 \tag{2.13}$$

bulunur. İkinci bir dönüşüm olarak

$$\boxed{\chi_k(\eta) = e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta)} \tag{2.14}$$

seçelim.

$$\frac{\mathrm{d}\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = -i\omega_+ e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta) + e^{-i\omega_+\eta}\frac{\mathrm{d}\psi(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} &= -i\omega_+\left[-i\omega_+ e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta) + e^{-i\omega_+\eta}\frac{\mathrm{d}\psi(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\right] + (-i\omega_+)\,e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta) + e^{-i\omega_+\eta}\frac{\mathrm{d}^2\psi(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}\\ &= -\omega_+^{\,2}e^{-i\omega_+\eta}\psi - i\omega_+ e^{-i\omega_+\eta}\psi' - i\omega_+ e^{-i\omega_+\eta}\psi' + e^{-i\omega_+\eta}\psi''\\ &= -\omega_+^{\,2}e^{-i\omega_+\eta}\psi - 2i\omega_+ e^{-i\omega_+\eta}\psi' + e^{-i\omega_+\eta}\psi''\end{aligned}$$

hesaplandıktan sonra, (2.14)'le birlikte (2.13)'te yerlerine konursa:

$$\begin{aligned}\rightarrow \left(\Box + m^2\right)\Phi &= -\omega_+^{\,2}\cancel{e}^{-i\omega_+\eta}\psi - 2i\omega_+\cancel{e}^{-i\omega_+\eta}\psi' + \cancel{e}^{-i\omega_+\eta}\psi''\\ &\quad + k^2\cancel{e}^{-i\omega_+\eta}\psi + \left(A + B\,\tanh\rho\eta\right)m^2\cancel{e}^{-i\omega_+\eta}\psi = 0\\ \Rightarrow \psi'' - 2i\omega_+\psi' - \omega_+^{\,2}\psi + k^2\psi + m^2\left(A + B\,\tanh\rho\eta\right)\psi &= 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

Bu noktada

$$\boxed{\rho\eta = x} \tag{2.16}$$

dönüşümü yapalım. (2.16) denklemi

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2i\omega_+}{\rho}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \frac{\omega_+^2}{\rho^2}\psi + \frac{k^2}{\rho^2}\psi + \frac{m^2}{\rho^2}\left(A + B\,\tanh x\right)\psi = 0 \tag{2.17}$$

haline ve

$$\boxed{\tanh x = y} \tag{2.18}$$

dönüşümüyle

$$\begin{array}{|l}
y = \tanh x = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right) \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2 \\
\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-y^2)\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \\
\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(1-y^2)\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}\right] = (1-y^2)^2\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} - 2y(1-y^2)\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \\
\hline
\end{array}$$

$$(1-y^2)\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} - 2y(1-y^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} - \frac{2i\omega_+}{\rho}(1-y^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} + \frac{k^2}{\rho^2}\psi + \frac{m^2}{\rho^2}\left(A+By\right)\psi - \frac{\omega_+^2}{\rho^2}\psi = 0 \tag{2.19}$$

şekline gelir.

Denklemimize son olarak

$$\boxed{\psi(\eta) = (1-y^2)^\alpha u} \tag{2.20}$$

dönüşümünü uygulayalım:

$$\begin{array}{|l}
\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} = \alpha(1-y^2)^{\alpha-1}(-2y)u + (1-y^2)^\alpha u' \\
\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} = \alpha(1-y^2)^{\alpha-1}(-2y)u' + (1-y^2)^\alpha u'' \\
\quad + \left[\alpha(\alpha-1)(1-y^2)^{\alpha-2}(-2y)^2 - 2\alpha(1-y^2)^{\alpha-1}\right]u + \alpha(1-y^2)^{\alpha-1}(-2y)u' \\
\quad = (1-y^2)^\alpha u'' - 4\alpha y(1-y^2)^{\alpha-1}u' - 2\alpha(1-y^2)^{\alpha-1}u + 4\alpha(\alpha-1)y^2(1-y^2)^{\alpha-2}u \\
\hline
\end{array}$$

Bu dönüşümü denkleme yerleştirmeden önce, şu ana kadar gerçekleştirdiğimiz dönüşümleri hatırlamamızda fayda var:

$$\boxed{\Phi = e^{ikx}\chi_k(\eta) = e^{ikx}e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta) = e^{ikx}e^{-i\omega_+\eta}(1-y^2)^\alpha u} \tag{2.21}$$

Bu son dönüşümle birlikte, diferansiyel denklemimiz şu hale gelecektir:

$$\Rightarrow (1-y^2)^{\cancel{2}}\cancel{(1-y^2)^{\alpha}}\left[u''-4\alpha y(1-y^2)^{-1}u'-2\alpha(1-y^2)^{-1}u+4\alpha(\alpha-1)y^2(1-y^2)^{-2}u\right]$$
$$-2y\cancel{(1-y^2)}\cancel{(1-y^2)^{\alpha}}\left[-2y\alpha u(1-y^2)^{-1}+u'\right]$$
$$-\frac{2i\omega_+}{\rho}\cancel{(1-y^2)}\cancel{(1-y^2)^{\alpha}}\left[-2y\alpha u(1-y^2)^{-1}+u'\right]$$
$$-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]\cancel{(1-y^2)^{\alpha}}u\left[\frac{\cancel{(1-y^2)}}{(1-y^2)}\right]=0$$

$$\rightarrow (1-y^2)\left[u''-4\alpha y u'(1-y^2)^{-1}-2\alpha u(1-y^2)^{-1}+4\alpha(\alpha-1)\left(\overbrace{y^2+1-1}^{y^2}\right)(1-y^2)^{-2}u\right]$$
$$-2y\left[u'-2y\alpha u(1-y^2)^{-1}\right]-\frac{2i\omega_+}{\rho}\left[u'-2y\alpha u(1-y^2)^{-1}\right]$$
$$-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]\frac{u}{(1-y^2)}=0$$

$$\rightarrow (1-y^2)u''-4\alpha y u'-2\alpha u-4\alpha(\alpha-\underline{1|})u+\underline{\frac{4\alpha(\alpha-1)}{(1-y^2)}\Big|}u$$
$$-2yu'+4\underline{\frac{\left(y^2+1-1\right)}{(1-y^2)}\Big|}\alpha u-\frac{2i\omega_+}{\rho}u'+\frac{4i\omega_+ y\alpha u}{\rho(1-y^2)}$$
$$-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]\frac{u}{(1-y^2)}=0$$

yukarıdaki denklemde, bu| şekilde işaretlenmiş olan terimler açılırsa, birbirlerini götüren terimlere ulaşılır (sadece işaretlenmiş olan terimler alınırsa):

$$4\alpha u+\left\{\frac{4\alpha^2 u}{1-y^2}-\frac{4\alpha u}{1-y^2}\right\}+\left\{-4\alpha u+\frac{4\alpha u}{1-y^2}\right\}=\frac{4\alpha^2 u}{1-y^2}$$

bu sadeleştirmeden sonra, denklemimizi tekrar yazalım:

$$(1-y^2)u''-4\alpha y u'-2\alpha u-4\alpha^2 u+\frac{4\alpha^2 u}{(1-y^2)}-2yu'$$
$$-\frac{2i\omega_+}{\rho}u'+\frac{4i\omega_+ y\alpha u}{\rho(1-y^2)}-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]\frac{u}{(1-y^2)}=0 \qquad (2.22)$$

fakat, ne yazık ki mevcut denklemde, bir sorunla karşı karşıyayız; η ile y arasındaki bağıntı, (2.16) ve (2.18) denklemlerini birleştirerek elde edilir: $\boxed{y=\tanh\rho\eta}$ yani, $\eta\to\pm\infty$ için $y\to\pm 1$ değerine yakınsar ve bu da denklemimizin son halindeki $(1-y^2)^{-1}$'li terimleri limitlerde “patlatır”. Bu sorunun üstesinden gelmek için, $(1-y^2)^{-1}$’li terimleri ayrı olarak tekrar yazalım ve birbirlerini 0’a eşitlediği varsayımını yapalım. Yani

$$\begin{aligned} &\frac{4\alpha^2 u}{(1-y^2)}+\frac{4i\omega_+ y\alpha u}{\rho(1-y^2)}-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]\frac{u}{(1-y^2)}=0 \\ \rightarrow \quad &4\alpha^2+\frac{4i\omega_+ y\alpha}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+By\right)\right]=0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

olsun. (2.23) eşitliğinin, limitlerde y’ye bağlı davranışını inceleyelim:

$\eta \rightarrow \pm\infty \;\Rightarrow\; y \rightarrow \pm 1$:

$$y \rightarrow +1: \quad 4\alpha^2+\frac{4i\omega_+\alpha}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A+B\right)\right]=0 \tag{2.24}$$

$$y \rightarrow -1: \quad 4\alpha^2-\frac{4i\omega_+\alpha}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\left[\omega_+^2-k^2-m^2\left(A-B\right)\right]=0 \tag{2.25}$$

(2.24) denkleminden (2.25) denklemi çıkartılırsa:

$$\frac{8i\omega_+\alpha}{\rho}=-\frac{2m^2}{\rho^2}B \;\rightarrow\; \alpha=\frac{im^2B}{4\omega_+\rho} \tag{2.26}$$

elde edilmiş olur. Bu noktadan sonra, ω_+ terimi ile ilgilenmeye başlayabiliriz. (2.24) ve (2.25) denklemlerinde ω_+ için iki eşitlik bulunur:

$$y \rightarrow +1, \quad \omega_+=\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)} \tag{2.27}$$

$$y \rightarrow -1, \quad \omega_+=\sqrt{k^2+m^2\left(A-B\right)} \tag{2.28}$$

ω_+, bu iki limit çözümünün ortalaması olarak alınırsa:

$$\omega_+=\frac{1}{2}\left[\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}+\sqrt{k^2+m^2\left(A-B\right)}\right] \tag{2.29}$$

bu noktada

$$\omega_-=\frac{1}{2}\left[\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}-\sqrt{k^2+m^2\left(A-B\right)}\right] \tag{2.30}$$

olarak, ikinci bir terim daha tanımlayalım.

Bu ifadeyi (2.26) eşitliğinde yerine koyduğumuzda

$$\alpha=\frac{im^2B}{4\rho}\frac{\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}-\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}}{\frac{1}{2}\left[k^2+m^2\left(A+B\right)-\left(k^2+m^2\left(A-B\right)\right)\right]}=\frac{i\cancel{m^2}\cancel{B}}{\cancel{4}2\rho}\frac{\cancel{2}\omega_-}{\cancel{m^2}\cancel{B}}$$

$$\alpha=\frac{i\omega_-}{2\rho} \tag{2.31}$$

Artık “gönül rahatlığıyla” diferansiyel denklemimizin son hali olan (2.22) denklemimize dönebiliriz. Denklemi, (2.23)’te gerçekleşmesini istediğimiz koşulu göz önünde bulundurarak tekrar yazarsak (artık $(1-y^2)^{-1}$’li terimlerin birbirini 0’a eşitlemiş olduğu kabulünü kullanınca):

$$(1-y^2)u''-4\alpha y u'-2\alpha u-4\alpha^2 u-2yu'-\frac{2i\omega_+}{\rho}u'=0 \tag{2.32}$$

(2.31) eşitliği de burada yerine konulduğunda, denklemimiz

$$(1-y^2)u''-4y\frac{i\omega_-}{2\rho}u'-2\frac{i\omega_-}{2\rho}u+4\frac{\omega_-^2}{4\rho^2}u-2yu'-\frac{2i\omega_+}{\rho}u'=0 \tag{2.33}$$

halini alır. Bu noktadan itibaren, y’nin limitleri için iki ayrı çözüm belirleme yoluna gireceğiz. Öncelikle $\eta \to +\infty$, $y \to +1$ limiti için

$$\boxed{z=\frac{1-y}{2}} \tag{2.34}$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)=\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}$$

$$(1-y^2)=(1-y)(1+y)=(1-1+2z)(1+1-2z)=4z(1+z)$$

(2.34) dönüşümü ve yukarıda hesapladığımız “yan hesaplar” da yerlerine konursa, (2.33) denklemimizin alacağı şekil şu olur:

$$\frac{4z(1-z)}{4}u''+4(1-2z)\frac{i\omega_-}{2\rho}\frac{1}{2}u'-2\frac{i\omega_-}{2\rho}u+4\frac{\omega_-^2}{4\rho^2}u+2(1-2z)\frac{1}{2}u'+\frac{2i\omega_+}{\rho}\frac{1}{2}u'=0 \tag{2.35}$$

$z(1-z)u''$ teriminden de tahmin edilebileceği üzere, amacımız, denklemimizi, karakteristiği

$$z(1-z)u''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right]u'-\alpha\beta u=0 \tag{2.36}$$

ile verilen hipergeometrik diferansiyel denklem haline getirmek. Bu amaçla, önce (2.35)’deki terimleri –mevcut sadeleştirmeleri yaptıktan sonra- uygun şekilde gruplandıralım:

$$z(1-z)u''+\left[\frac{i\omega_-}{\rho}+\frac{i\omega_+}{\rho}+1-\left(\frac{i\omega_-}{\rho}+1\right)2z\right]u'+\left[\frac{\omega_-^2}{\rho^2}-\frac{i\omega_-}{\rho}\right]u=0 \tag{2.37}$$

(2.37) denklemini, (2.36) ile kıyaslarsak, katsayıları ve aralarındaki bağıntıyı şöyle buluruz:

$$\gamma = \frac{i\omega_-}{\rho} + \frac{i\omega_+}{\rho} + 1 \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} -(\alpha+\beta+1) &= -2\left(\frac{i\omega_-}{\rho}+1\right) \quad \rightarrow \quad \alpha+\beta = \frac{2i\omega_-}{\rho}+1 \\ -\alpha\beta &= \frac{\omega_-^2}{\rho^2} - \frac{i\omega_-}{\rho} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{i}{\alpha}\left(\frac{\omega_-}{\rho} + \frac{i\omega_-}{\rho^2}\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

α ile β arasındaki ilişkiyi veren (2.39) bağıntıları birleştirilirse

$$\alpha + \frac{i}{\alpha}\left(\frac{\omega_-}{\rho} + \frac{i\omega_-}{\rho^2}\right) = \frac{2i\omega_-}{\rho} + 1$$

$$\alpha^2 - \left(1 + \frac{2i\omega_-}{\rho}\right)\alpha + i\left(\frac{\omega_-}{\rho} + \frac{i\omega_-}{\rho^2}\right) = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklemden α değeri çekildiğinde:

$$\alpha_{1,2} = 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho} \tag{2.40}$$

bulunur. α ile β, birbirlerine göre simetrik olduğundan, (2.40)'daki değerlerden ilkini α'ya, ikincisini de β'ya atayalım (-doğal olarak- aynı sonuca (2.40)'daki değerlerden birini (2.39) denklemlerinin bir tanesine koyarak da ulaşılabilinir). Bu noktada üçüncü değişken γ'la ilgilenelim: (2.27) ve (2.28) denklemlerindeki ω_+'nın limitlerdeki değerleri, η'ya bağlılıklarına bakarak, sırasıyla ω_{out} ve ω_{in} olarak yeniden adlandırılırsa, (2.29) ve (2.30) eşitlikleri vasıtasıyla

$$\begin{aligned} \omega_{out} &= \omega_+ + \omega_- \\ \omega_{in} &= \omega_+ - \omega_- \end{aligned} \tag{2.41}$$

elde edilir. Bu takdirde, artık, (2.38) eşitliğindeki γ'yı

$$\gamma = 1 + \frac{i}{\rho}(\omega_+ + \omega_-)$$

$$\gamma = 1 + \frac{i}{\rho}\omega_{out} \tag{2.42}$$

olarak yazabiliriz.

(2.36) ile verilen bir hipergeometrik diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(z) = {}_2F_1\left(\alpha,\beta,\gamma;z\right) \tag{2.43}$$

olduğundan, (2.37) diferansiyel denkleminin çözümü de, sırasıyla (2.40) ve (2.42) ile verilmiş olan α, β ve γ değerlerinin yerine konmasıyla

$$u^{out}(z) = {}_2F_1\left(\left(1+\frac{i\omega_-}{\rho}\right),\frac{i\omega_-}{\rho},\left(1+\frac{i}{\rho}\omega_{out}\right);z\right) \tag{2.44}$$

olarak bulunur. *u(z)* fonksiyonundaki *"out"* indisi, çözümlerimizi $\eta\to+\infty$, $y\to+1$ limitinde aradığımızı ve bu amaca uygun olarak da (2.34) dönüşümünü gerçekleştirdiğimizi göz önünde tutmak için eklenmiştir. *"in"*, yani $\eta\to-\infty$, $y\to-1$ limitinde çözüm ararsak, bu sefer yapmamız gereken (2.34) dönüşümü yerine

$$\boxed{z=\frac{1+y}{2}} \tag{2.45}$$

dönüşümünü almaktır. Bu dönüşüm altında (2.33) diferansiyel denklemimiz şu hali alır:

$$\frac{4z(1-z)}{4}u''+4(1-2z)\frac{i\omega_-}{2\rho}\frac{1}{2}u'-2\frac{i\omega_-}{2\rho}u+4\frac{\omega_-^2}{4\rho^2}u+2(1-2z)\frac{1}{2}u'-\frac{2i\omega_+}{\rho}\frac{1}{2}u'=0 \tag{2.46}$$

ve

$$z(1-z)u''+\left[\frac{i\omega_-}{\rho}-\frac{i\omega_+}{\rho}+1-\left(\frac{i\omega_-}{\rho}+1\right)2z\right]u'+\left[\frac{\omega_-^2}{\rho^2}-\frac{i\omega_-}{\rho}\right]=0 \tag{2.47}$$

bu denklemin *"out"* durumuna dair olan (2.37) denkleminden tek farkı, ω_+'lı terimin işaretidir. Bu terim de, sadece γ katsayısını ilgilendirdiğinden, denklemin çözümünde kullanacağımız α ve β, *"out"* durumu için bulduğumuz, (2.40) denklemiyle verilen α ve β 'nın aynısı olacaktır. γ ise, *"out"* durumunda yaptığımızın benzeri olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\gamma=1+\frac{i}{\rho}(\omega_- -\omega_+)$$

ama zaten yukarıdaki $(\omega_- -\omega_+)$ terimini biz (2.41) bağıntıları ile tanımlamıştık! Bu durumda

$$\gamma=1-\frac{i}{\rho}\omega_{in} \tag{2.48}$$

bulunur. Böylelikle (2.47) diferansiyel denkleminin çözümünü

$$u^{in}(z) = {}_2F_1\left(\left(1+\frac{i\omega_-}{\rho}\right),\frac{i\omega_-}{\rho},\left(1-\frac{i}{\rho}\omega_{in}\right);z\right) \tag{2.49}$$

ile sağlamış oluruz.

Bu hesapları tamamladıktan sonra, vaktiyle (2.21) ile özetlemiş olduğumuz dönüşümleri buraya bir kez daha yazmakta fayda var:

$$\boxed{\Phi = e^{ikx}\chi_k(\eta) = e^{ikx}e^{-i\omega_+\eta}\psi(\eta) = e^{ikx}e^{-i\omega_+\eta}(1-y^2)^{\alpha}\,u}$$

bu dönüşümlerden başka, iki dönüşüm daha yapmış ve ayrıca α 'yı da elde etmiştik:

$$\alpha = \frac{i\omega_-}{2\rho}$$

$$\boxed{y = \tanh\rho\eta}$$

$$\boxed{\eta \to \pm\infty,\ z = \frac{1\mp y}{2}}$$

Şimdi bütün bu denklemleri birleştirelim. Önce $(1-y^2)^{\alpha}$ kısmını halledelim:

$$\begin{aligned}
&y = \tanh\rho\eta,\quad \alpha = \frac{i\omega_-}{2\rho}\\
&(1-y^2)^{\alpha} = (1-\tanh^2\rho\eta)^{\frac{i\omega_-}{2\rho}} = \left(\cosh^{-2}\rho\eta\right)^{\frac{i\omega_-}{2\rho}} = \left(\cosh^2\rho\eta\right)^{\frac{-i\omega_-}{2\rho}}\\
&\qquad = \exp\left\{\ln\left[\left(\cosh^2\rho\eta\right)^{\frac{-i\omega_-}{2\rho}}\right]\right\} = \exp\left[\frac{-i\omega_-}{\rho}\ln\left(\cosh\rho\eta\right)\right]
\end{aligned}$$

Çözümü yaparken saptadığımız üzere, Φ alan fonksiyonu, mevcut dalga sayılarına ve konformal zamanın limitlerine bağlıdır. O halde, şu andan itibaren Φ 'yi u_k^{out} ve u_k^{in} diye iki ayrı fonksiyonda inceleyeceğiz. Bu sayfada özetlemeye çalışmış olduğumuz dönüşümler ve tanımlarla birlikte (2.44) ve (2.49) çözümlerini de kullanırsak:

$$\begin{aligned}
u_k^{out}(\eta,x) &= \left(4\pi\omega_{out}\right)^{-1/2}\exp\left[ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho}\ln\left(\cosh\rho\eta\right)\right]\\
&\times {}_2F_1\left(\left(1+\frac{i\omega_-}{\rho}\right),\frac{i\omega_-}{\rho},\left(1+\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right);\frac{1-\tanh\rho\eta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

ve

$$\begin{aligned}
u_k^{in}(\eta,x) &= \left(4\pi\omega_{in}\right)^{-1/2}\exp\left[ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho}\ln\left(\cosh\rho\eta\right)\right]\\
&\times {}_2F_1\left(\left(1+\frac{i\omega_-}{\rho}\right),\frac{i\omega_-}{\rho},\left(1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\right);\frac{1+\tanh\rho\eta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

olarak bulunur. Denklemlerdeki $\left(4\pi\omega_{out,in}\right)^{-1/2}$ terimleri, normalizasyon koşulları sebebiyle konmuşlardır. Çözümlerin, ilgili oldukları limitlerdeki davranışlarına bakacak olursak

$$u_k^{out} \xrightarrow[\eta\to+\infty]{} \left(4\pi\omega_{out}\right)^{-1/2} e^{ikx-i\omega_{out}\eta}$$
$$u_k^{in} \xrightarrow[\eta\to-\infty]{} \left(4\pi\omega_{in}\right)^{-1/2} e^{ikx-i\omega_{in}\eta} \tag{2.52}$$

olduklarını görürüz. $\left({}_2F_1(a,b,c;0)=1 \text{ olduğunu göz önünde bulundururak}\right)$

Peki (2.50) ile (2.51) ile verilen alan fonksiyonları arasında bir geçiş mümkün müdür? Yahut, başka bir deyişle bir fonksiyonu diğer fonksiyon cinsinden

$$u_k^{in}\left(\eta,x\right)=\alpha_k u_k^{out}\left(\eta,x\right)+\beta_k u_{-k}^{out*}\left(\eta,x\right) \tag{2.53}$$

bağıntısı ile verilen α_k ve β_k Bogolubov katsayılarını kullanmak kabil midir? Bunu görmek için, öncelikle hipergeometrik fonksiyonların bir dönüşüm özelliğini bilmek gerekir:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\,{}_2F_1(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\&+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta;1-z)\end{aligned}$$

Bizler, $u_k^{in}\left(\eta,x\right)$den yola çıkarak, $u_k^{out}\left(\eta,x\right)$a ulaşmaya çalışacağız. Bunun için de –şimdilik- (2.51) eşitliğinin hipergeometrik kısmını çözümleyelim. Önce, bulmuş olduğumuz katsayıları yazıp, kullanılacak olan bağıntıları hesaplayalım:

$$\begin{gathered}\alpha=1+\frac{i\omega_-}{\rho}\qquad\beta=\frac{i\omega_-}{\rho}\\ \gamma_{in}=1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\quad\gamma_{out}=1+\frac{i\omega_{out}}{\rho}\\ \omega_{in}=\omega_+-\omega_-\quad\omega_{out}=\omega_++\omega_-\end{gathered} \tag{2.54}$$

$$\begin{gathered}\gamma_{in}-\alpha=1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}-1-\frac{i\omega_-}{\rho}=-\frac{i}{\rho}(\omega_+-\omega_-+\omega_-)=-\frac{i\omega_+}{\rho}\\ \gamma_{in}-\beta=1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}-\frac{i\omega_-}{\rho}=1-\frac{i}{\rho}(\omega_+-\omega_-+\omega_-)=1-\frac{i\omega_+}{\rho}\\ \gamma_{in}-\alpha-\beta=1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}-1-\frac{i\omega_-}{\rho}-\frac{i\omega_-}{\rho}=-\frac{i}{\rho}(\omega_++\omega_-)=-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\\ 1+\alpha+\beta-\gamma=1+\frac{i\omega_{out}}{\rho}\end{gathered} \tag{2.55}$$

Başlangıcımız *"in"* bölgesi olduğundan ötürü kullanacağımız dönüşümle birlikte, $(1-z)$ terimi:

$$\begin{gathered}z=\frac{1+\tanh\rho\eta}{2}\\ (1-z)=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{\tanh\rho\eta}{2}\right)=\left[\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right]\end{gathered} \tag{2.56}$$

$$1-\tanh\rho\eta = 1-\frac{\sinh\rho\eta}{\cosh\rho\eta} = 1-\frac{1-e^{-2\rho\eta}}{1+e^{-2\rho\eta}} = 1-\frac{\left(1-2e^{-2\rho\eta}+e^{-4\rho\eta}\right)}{1-e^{-4\rho\eta}}$$

"out" bölgesine geçiş yapmak istediğimizden $\eta \to +\infty$ limitini almalıyız ve bu limitte, $e^{-4\rho\eta}$ terimleri, $e^{-2\rho\eta}$ terimlerine oranla küçük kalacaklarından ihmal edilebilirler. Bu durumda:

$$(1-z) = \left[\frac{1}{2}(1-\tanh\rho\eta)\right] = e^{-2\rho\eta}$$

ve $\gamma_{in}-\alpha-\beta$ değeri de (2.55)'ten bakılıp yerine konduğunda

$$(1-z)^{\gamma_{in}-\alpha-\beta} = \left(e^{-2\rho\eta}\right)^{-i\omega_{out}/\rho} \tag{2.57}$$

olarak bulunur.

Şu son eşitlikleri, hipergeometrik fonksiyonların dönüşüm formülünde yerine koymanın sırası geldi. Bu durumda:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1^{(in)} &= \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)} \times {}_2F_1\left(1+\frac{i\omega_{-}}{\rho},\frac{i\omega_{-}}{\rho},1+\frac{i\omega_{out}}{\rho};\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right) \\
&+e^{2i\rho\eta\omega_{out}}\frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} \times {}_2F_1\left(-\frac{i\omega_{+}}{\rho},1-\frac{i\omega_{+}}{\rho},1-\frac{i\omega_{out}}{\rho};\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

iki hipergeometrik fonksiyonun katsayıları arasındaki benzerlik dikkatimizi çekiyor: birinci fonksiyonun katsayıları, ikincisinde eşlenikleri alınmış durumda bulunuyorlar ve α ile β katsayılarının yeri değişmiş durumda. Ayrıca, fonksiyon değişkeni de (2.50) ile tanımlamış olduğumuz *"out"* çözümlerinin değişkeni olmuş, ki bu zaten bizim bulmayı ümit ettiğimiz bir sonuçtu. Hipergeometrik fonksiyonların katsayıları ile ilgili bir özelliğine (2.40)'taki kökleri bulduktan sonra değinmiştik; bu da α ile β katsayılarının simetrik olduğu, birbirlerinin yerine yazılabilecekleri oluşuydu. Öyle ise, (2.58)'de tanımlanan fonksiyondaki birinci hipergeometrik terim, *"out"* bölgesindeki fonksiyonun hipergeometrik terimi ile aynıyken, ikinci hipergeometrik terim ise tam anlamıyla, ilk terimin kompleks eşleniğidir! Buradan da artık anlıyoruz ki, *"in"* bölgesine dair olan çözüm *"out"* bölgesindeki çözüm cinsinden yazılabilmiştir. (2.58)'i, (2.53) tanımıyla ve (2.50) ile (2.51) çözümleriyle kıyaslarsak, Bogolubov katsayılarının şöyle olduğunu görürüz:

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)}$$

$$\beta_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega_{in}}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} \tag{2.59}$$

Bulduğumuz bu Bogolubov katsayılarını yorumlayarak incelediğimiz alan hakkında birtakım öngörülerde bulunabiliriz: α ile β katsayıları birbirinden farklıdır, demek ki, alan bir değişime uğramıştır (aslında bunu zaten, $u_k^{in}(\eta,x)$ ve $u_k^{out}(\eta,x)$ fonksiyonlarını farklı buluşumuzdan ötürü anlamıştık). Bu değişimi, alanın parçacık yarattığı yönünde yorumlayabiliriz, aksi takdirde, β katsayısı sıfıra gitmeliydi, oysa katsayıların mutlak değerlerinin karelerini hesaplarsak, bunun böyle olmadığını görebiliriz:

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_{in}/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}$$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_{out}/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \tag{2.60}$$

ayrıca α ile β katsayıları, normalizasyon koşullarını da gerçeklerler:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \tag{2.61}$$

(Bogolubov katsayılarının kesin olarak hesaplanmasına dair ayrıntılı bilgi, Walker, W.R. 1985'te bulunabilir.)

III. 1+1 UZAYDA HAREKETLİ AYNA ÇÖZÜMLERİ ---------------------------------------

Önceki bölümde, çalıştığımız uzayı incelemiş, bu uzayda, $C(\eta)$: konformal ölçek faktörü olmak üzere,

$$\left(\Box + m^2\right)\Phi = \left\{-\partial_x^2 + \partial_\eta^2 + C(\eta)\, m^2\right\}\Phi = 0 \tag{3.1}$$

denkleminin çözümlerini araştırmıştık. Bu bölümde ise, hareketli bir aynanın varlığı durumunda kütlesiz, skaler bir alanın dalga fonksiyonunu bulmaya çalışacağız. İki boyutlu uzay-zamanda çalıştığımızdan ötürü, aynamız, aslında bir noktadan ibaret olacaktır. Noktamızı "ayna" ile özdeşleştirmemizin sebebi ise, üzerine gelen dalgaları yansıtması ve üzerinde alan fonksiyonunun 0 olması, yani aynamızın bir sınır teşkil etmesidir. Bu tanımları yaptıktan sonra, artık incelememize başlayabiliriz.

Aynanın hareketi

$$x = z(t) \tag{3.2}$$

fonksiyonuyla verilmiş olsun. Bu durumda, aynanın hızı olan $\dot{z}(t)$ için ilk koşulumuzu elde ederiz:

$$\left|\dot{z}(t)\right| < 1 \tag{3.3}$$

(3.3) koşulu, aynanın, ışıktan hızlı hareket edemeyeceğini garantilemektedir. Ele aldığımız uzay, kütlesiz, skaler dalga denklemi olan

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{3.4}$$

eşitliği aynanın sağında sağlasın (bu uzay, geçen bölümdeki uzayın kütlesiz halidir). Sadece aynanın sağıyla ilgileniyor olmamız, aynamızın "cilalı" yani 100% yansıtıcı olduğunu gösterir ("lekeli" olarak tabir ettiğimiz, yarı geçirgen aynalar üzerine bir çalışma Nicolaevici, N. 2000'de bulunabilir). Bu sebepten ötürü (3.4) diferansiyel denklemine, bu çalışmada, sadece $x > z(t)$ bölgesinde çözüm arayacağız. Aynanın başta belirttiğimiz, alanla olan ilişkisini formüle edersek:

$$\Phi\left(t, z(t)\right) = 0 \tag{3.5}$$

olur. (3.4) denklemini daha faydalı bir hale getirmek üzere karakteristik doğrularımızı, iki yeni değişkenin fonksiyonu olarak tanımlayalım:

$$\boxed{t - x = f\left(w - s\right)} \qquad \boxed{t + x = g\left(w + s\right)} \tag{3.6}$$

bu sayede metriğimiz de şu hale gelir:

$$\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2=f'(w-s)g'\left(w+s\right)\left(\mathrm{d}w^2-\mathrm{d}s^2\right) \tag{3.7}$$

(3.4) diferansiyel denklemi de bu koordinat dönüşümleri altında değişmez kalır:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0 \tag{3.8}$$

f ile g fonksiyonlarına erişmeye çalışırken, onlara işimize yarayacak şekilde özellikler yükleyelim. Mesela $s = 0$ olduğunda, eğrimiz aynanın sahip olduğu eğriye dönüşsün. Bu kabulden sonra, (3.5) eşitliğinden açıktır ki

$$\Phi(w,0)=0 \tag{3.9}$$

sonucu çıkar. Artık aynaya dair koordinatları f ve g fonksiyonları cinsinden yazabiliriz:

$$x=\tfrac{1}{2}\left[g(w)-f(w)\right] \qquad t=\tfrac{1}{2}\left[g(w)+f(w)\right] \tag{3.10}$$

(3.2) ile verilen ayna hareketi bu takdirde

$$\tfrac{1}{2}\left[g(w)-f(w)\right]=z\left(\tfrac{1}{2}\left[g(w)+f(w)\right]\right) \tag{3.11}$$

olarak yazılabilir hale gelir. Aynanın başlangıçta durgun olduğunu düşünerek

$$t<0 \text{ iken } z(t)=0 \tag{3.12}$$

sınır koşulunu elde ederiz. Bu koşulla (3.11)'i birlikte sağlamanın yolu:

$$\begin{gathered} w<0 \text{ için } f(w)=g(w)=w \\ \forall w \text{ için } g(w)=w \end{gathered} \tag{3.13}$$

Bu yeni koşullar altında (3.11) denklemini tekrar yazalım:

$$\tfrac{1}{2}\left[w-f(w)\right]=z\left(\tfrac{1}{2}\left[w+f(w)\right]\right) \tag{3.14}$$

(3.8) denklemini çözmek için çarpanlara ayırma metodunu uygularız:

$$\boxed{\Phi(w,s)=W(w)S(s)} \tag{3.15}$$

dönüşümü ile diferansiyel denklem

$$\frac{1}{W}\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}w^2}-\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}s^2}=0 \tag{3.16}$$

iki terim de $-\omega^2$ 'ye eşitlenecek olursa, (3.9) sınır koşulunu da göz önünde bulundurarak

$$S(s)=\sin\omega s \tag{3.17}$$

bulunur. $W(w)$ içinse eksponansiyel ifadeyi kullanmalıyız:

$$W(w)=e^{-i\omega w} \tag{3.18}$$

Böylelikle, normalizasyon koşulları ile birlikte ω 'ya bağlı çözümleri elde ederiz:

$$\Phi_\omega(w,s)=(\pi\omega)^{-1/2}\sin\omega s\, e^{-i\omega w} \tag{3.19}$$

Çözümü, (t,x) değişkenleri cinsinden yazmak için önce sinüslü terimi eksponansiyel formda yazmamız gerekir

$$\sin\omega s=\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}=i\left(4\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega s}-e^{i\omega s}\right]$$

bunu *w*'ya bağlı olarak bulduğumuz eksponansiyel terimle çarptığımızda

$$\sin\omega s\, e^{-i\omega w}=i\left(4\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega(s+w)}-e^{i\omega(s-w)}\right]$$

normalizasyon sabitini de eklediğimizde, fonksiyonumuz, dönüşüme hazırdır:

$$\Phi_{\omega}(w,s)=i\left(4\pi\omega\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega(s+w)}-e^{i\omega(s-w)}\right] \tag{3.20}$$

eksponansiyel terimlerde, parantez içinde bulunan ifadelerle gerçek koordinatlar arasındaki bağıntıyı biz, aslında başlangıçta koordinat takımı dönüşümlerini yaparken tanımlamıştık [(3.6) dönüşümleri]. Bu bilgiler ışığında, nihayet alan denklemimizi (t,x) koordinatları cinsinden yazabiliriz:

$$\begin{Bmatrix} t-x=f\left(w-s\right)\rightarrow(s-w)=-f^{-1}(t-x) \\ t+x=g\left(w+s\right)\rightarrow(w+s)=g^{-1}(t+x) \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_{\omega}(t,x)=i\left(4\pi\omega\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega g^{-1}(t+x)}-e^{-i\omega f^{-1}(t-x)}\right] \tag{3.21}$$

(3.13) koşullarından $g^{-1}(t+x)=t+x$ olduğunu bulabiliriz. Hem normal koordinatları bir isim altında toplamak, hem de denklemi daha anlaşılır kılmak amacıyla, şu tanımları yapalım:

$$\begin{gathered} u\equiv t-x \qquad v\equiv t+x \\ \tau_u-z(\tau_u)=u \\ 2\tau_u-u=f^{-1}(u)=p(u) \end{gathered} \tag{3.22}$$

Fonksiyonumuzu, bu bağıntılarla tekrar düzenleyelim:

$$\Phi_{\omega}(t,x)=i\left(4\pi\omega\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega v}-e^{-i\omega(2\tau_u-u)}\right] \tag{3.23}$$

(3.22) ile verilen bağıntılardan ikincisi, aynamızın, *u* normal doğrusu ile kesiştiği noktanın zaman bileşenini verir. Zira, $z(t)$ aynanın yörüngesini belirlediği için, $u=t-x$, ayna yörüngesiyle birlikte, ancak ayna zamanıyla denklemde yerine konabilir. (3.22)'deki üçüncü bağıntı ise, kolaylıkla anlaşılabileceği üzere, ayna için başlangıçta kabul ettiğimiz (3.5) sınır koşulunun gerçekleştiğini garantiye alır. (3.23) ile verilen alan fonksiyonunu ayna üzerinde incelersek:

$$\Phi_{\omega}\left(\tau_u,z(\tau_u)\right)=i\left(4\pi\omega\right)^{-1/2}\left[e^{-i\omega\left[\tau_u+z(\tau_u)\right]}-e^{-i\omega\left[2\tau_u-\left(\tau_u-z(\tau_u)\right)\right]}\right] \tag{3.24}$$

fonksiyondaki eksponansiyel terimleri içeren parantezin içeriğini sadeleştirirsek

$$e^{-i\omega[\tau_u + z(\tau_u)]} - e^{-i\omega[2\tau_u - (\tau_u - z(\tau_u))]} = e^{-i\omega[\tau_u + z(\tau_u)]} - e^{-i\omega[\tau_u + z(\tau_u)]} = 0 \qquad (3.25)$$

buluruz. Böylece, ayna üzerinde alan fonksiyonunun 0'a eşit olduğunu göstermiş olduk. $p(u)$ fonksiyonunu denkleme sokmanın bir yararı daha vardır; açıktır ki u doğrusu boyunca ilerleyen bir ışın, aynaya $(\tau_u, z(\tau_u))$ noktasında çarpacak olursa, bu noktadan $v = \tau_u + z(\tau_u)$ doğrusu boyunca gidecek şekilde yansır. Bunun tersi de mümkündür.

(Eğer varsa) Yaratılan parçacık sayısını, Bogolubov katsayılarını hesaplayarak bulabiliriz. Fakat, bu aşamada yalnızca aynanın hareketinden ötürü bir parçacık yaratımı olup olmadığını merak etmekteyiz. Bu soruyu da, hesaplaması, Bogolubov katsayılarına nazaran daha kolay olan enerji-momentum tansörü $T_{\mu\nu}$'yü bularak çözebiliriz. Bizimki gibi düz uzayda tansör

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial t} & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} \qquad (3.26)$$

formundadır. Φ'yi kuantum alan operatörü olarak tanımlamak için, yaratma ve yok etme operatörlerini devreye sokmalıyız. Bu takdirde, Φ'yi, (3.23) ile tanımlanmış olan Φ_ω özfonksiyonlarının bileşeni olarak yazarız:

$$\Phi(t,x) = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \left[\mathrm{a}_\omega^{\mathrm{in}} \Phi_\omega + \mathrm{a}_\omega^{\mathrm{in}\dagger} \Phi_\omega^* \right] \qquad (3.27)$$

Φ'lerin Φ_ω'lara kuantizasyonu ile birlikte, (3.26) ile tanımlanan $T_{\mu\nu}$ ise beklenen değeri cinsinden şu formülle yazılır:

$$\left\langle T_{\mu\nu} \right\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, T_{\mu\nu}\left(\Phi_\omega, \Phi_\omega^*\right) \qquad (3.28)$$

Bu aşamaya gelirken, belirtmediğimiz halde, $T_{\mu\nu}$'nün hesabında belirli bir işlem, bizi yok etme operatörünün başta yer almasından kurtarmıştı, *"normal ordering"* tabir edilen bu taktik sayesinde, yok etme operatörü her zaman yaratma operatöründen önce geliyor ve bu sayede, sonsuz toplamlarda bir sabitin "patlaması"nın önü alınmış oluyordu (Bu metod hakkında daha ayrıntılı bilgi için bkz. Birrell, N.D., Davies, P.C.W. 1982 ve Dereli, T. 2000). Lakin, (3.28) integraline bakıldığında, bizi bu işlemin, patlamadan kurtarmayacağı aşikardır. O halde ne yapılmalıdır? Bu sorunun üstesinden, "nokta-bölme" (*point-splitting*) olarak bilinen bir metodla gelinmektedir. Bu metoda göre, (3.28) integralinde, Φ_ω ve Φ_ω^* fonksiyonlarının aynı

(t,x) noktasındaki değerlerini integrale sokmak yerine, Φ^*_ω fonksiyonlarının, ε çok küçük, pozitif sanal kısımlı bir sayı olmak üzere, (t,x) noktasındaki değeri değil fakat, $(t+\varepsilon, x)$ noktasındaki değeri integrale alınmalıdır (bu yöntemin, diğer metodlarla kıyası ve uygulamaları için bkz. Bayın, S.Ş., Özcan, M. 1997). Bu noktadan hareketle $T_{\mu\nu}$ için kısmi türevler hesaplanırsa:

$$\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial t} = \Phi_\omega(t,x) = i\left(4\pi\omega\right)^{-1/2}\left[-i\omega e^{-i\omega v} + i\omega p'(u) e^{-i\omega p(u)}\right] \quad ; \quad \left\{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 1\right\}$$

$$\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial t} = \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^{1/2}\left[e^{-i\omega v} - p'(u) e^{-i\omega p(u)}\right] \tag{3.29}$$

benzer işlemlerden sonra diğer bileşenler de bulunur:

$$\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial x} = \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^{1/2}\left[e^{-i\omega v} + p'(u) e^{-i\omega p(u)}\right] \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \Phi^*_\omega}{\partial t} = \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^{1/2}\left[e^{-i\omega(v+\varepsilon)} - p'(u+\varepsilon)\, e^{-i\omega p(u+\varepsilon)}\right] \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \Phi^*_\omega}{\partial x} = \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^{1/2}\left[e^{-i\omega(v+\varepsilon)} + p'(u+\varepsilon) e^{-i\omega p(u+\varepsilon)}\right] \tag{3.32}$$

Böylelikle, (3.26) tansörünün alan fonksiyonlarına etkimesi sonucu oluşacak (3.28) eşitliği, aşağıdaki toplu biçiminde yazılabilir:

$$\left.\begin{array}{l} \langle T_{00}\rangle = \langle T_{11}\rangle \\ \langle T_{10}\rangle = \langle T_{01}\rangle \end{array}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \omega\, \mathrm{d}\omega \left\{e^{i\omega\varepsilon} \pm p'(u) p'(u+\varepsilon) e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]}\right\} \tag{3.33}$$

Bu integralleri ayrı ayrı hesaplamaya geçmeden önce, $\langle T_{00}\rangle$ ile $\langle T_{01}\rangle$ arasındaki bağıntıyı, toplanmaları halinde $p(u)$'ya bağlı olan terimleri sıfırlayacakları gerçeğinden faydalanarak, bu durumda geriye kalan basit integrali hesaplayarak bulalım:

$$\langle T_{00}\rangle + \langle T_{01}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \omega\, \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1}$$

$$\langle T_{00}\rangle = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} - \langle T_{01}\rangle \tag{3.34}$$

Artık asıl integrale, geçebiliriz... (3.34) bağıntısıyla, $\langle T_{00}\rangle$'ı $\langle T_{01}\rangle$ cinsinden hesaplayabileceğimizden dolayı, sadece $\langle T_{01}\rangle$'i veren karışık integrali almak yeterli olacaktır. Bu durumda:

$$\langle T_{01}\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \omega\, \mathrm{d}\omega \left\{ e^{i\omega\varepsilon} - p'(u)p'(u+\varepsilon)e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]} \right\} \tag{3.35}$$

$a>0,\ \varepsilon = ia$ olduğunu da göz önünde tuttuğumuzda (3.35) integralini

$$\begin{aligned}\langle T_{01}\rangle = \frac{1}{4\pi}\lim_{\omega\to\infty^-}&\left[\frac{e^{i\omega\varepsilon}}{\varepsilon^2} - \frac{p'(u)p'(u+\varepsilon)\,e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]}}{[p(u+\varepsilon)-p(u)]^2} + \frac{ip'(u)p'(u+\varepsilon)\,\omega e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]}}{p(u+\varepsilon)-p(u)} - \frac{i\omega e^{i\omega\varepsilon}}{\varepsilon}\right] \\ &- \frac{[p(u+\varepsilon)-p(u)]^2 - p'(u)p'(u+\varepsilon)\varepsilon^2}{4\pi[p(u+\varepsilon)-p(u)]^2\varepsilon^2}\end{aligned} \tag{3.36}$$

olarak buluruz. Limitte, $e^{i\omega\varepsilon} = e^{-\omega a}$ teriminin, diğer tüm bileşenlere baskın geleceğine ve böylelikle, integralden sadece (3.36) sonucunun alt satırının "sağ kurtulacağına" dikkat ediniz. İntegralin sonucunu sadeleştirip yazarsak:

$$\langle T_{01}\rangle = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{p'(u)p'(u+\varepsilon)}{\left(p(u+\varepsilon)-p(u)\right)^2}\right] \tag{3.37}$$

(3.37) eşitliğinin, ε civarındaki Taylor açılımının ilk birkaç terimini yazarsak:

$$\begin{aligned}4\pi\langle T_{01}\rangle =& \left[-\frac{1}{4}\frac{(p''(u))^2}{(p'(u))^2} + \frac{1}{6}\frac{p'''(u)}{p'(u)}\right] \\ &+ \left[\frac{1}{12}\frac{p^{(4)}(u)}{p'(u)} - \frac{1}{2}\frac{(p''(u))^3}{(p'(u))^3} + \frac{p''(u)\left(-\frac{1}{3}\frac{p'''(u)}{p'(u)} + \frac{3}{4}\frac{(p''(u))^2}{(p'(u))^2}\right)}{p'(u)}\right]\varepsilon \\ &+ \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{p'''(u)\left(-\frac{1}{3}\frac{p'''(u)}{p'(u)} + \frac{3}{4}\frac{(p''(u))^2}{(p'(u))^2}\right)}{p'(u)} + \frac{1}{40}\frac{p^{(5)}(u)}{p'(u)} - \frac{1}{24}\frac{p''(u)p^{(4)}(u)}{(p'(u))^2} \\ +\frac{1}{12}\frac{(p'''(u))^2}{(p'(u))^2} - \frac{1}{2}\frac{(p''(u))^2 p'''(u)}{(p'(u))^3} + \frac{5}{16}\frac{(p''(u))^4}{(p'(u))^4} \\ +\frac{p''(u)}{p'(u)}\left(-\frac{1}{12}\frac{p^{(4)}(u)}{p'(u)} + \frac{1}{12}\frac{p''(u)p'''(u)}{(p'(u))^2} - \frac{1}{2}\frac{(p''(u))^3}{(p'(u))^3}\right)\end{array}\right]\varepsilon^2 \\ &+ \mathrm{O}(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{3.38}$$

ve nihayet, ε 'u 0'a götürürsek:

$$\langle T_{01} \rangle = \frac{1}{24\pi}\left[\frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{p''(u)}{p'(u)}\right)^2\right] \tag{3.39}$$

elde ederiz. ε 'u 0'a götürdüğümüzden ötürü, (3.34)'te –artık- ıraksayan terimi de atarsak,

$$\langle T_{00} \rangle = -\langle T_{01} \rangle = -(24\pi)^{-1}\left[\frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{p''(u)}{p'(u)}\right)^2\right] \tag{3.40}$$

olarak bulunur. İfadeleri daha şık bir biçimde yazarsak:

$$\langle T_{01} \rangle = -(12\pi)\left[p'(u)\right]^{1/2}\left\{\left[p'(u)\right]^{-1/2}\right\}'' \tag{3.41}$$

$$\langle T_{00} \rangle = (12\pi)\left[p'(u)\right]^{1/2}\left\{\left[p'(u)\right]^{-1/2}\right\}'' \tag{3.42}$$

Şimdi, bu bulgularımızı, bir örnek üzerinde kullanalım. Enerji-momentum tansörünün bilşenlerini (3.41) ve (3.42) olarak, sadece $p'(u)$ cinsinden yazmakla, pek çok zahmetli işlemden kurtulduk. Verilen bir örnekte artık yapmamız gereken şey, $z(t)$ ile verilen ayna yörünge denkleminden $p(u)$ fonksiyonunu saptayıp, denklemlerde yerine koymak. $z(t)$, örneğin

$$z(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ ae^{-t/a} + t - a & (0 < t < -a\ln(1-u_0/a)) \\ (u_0/a)t - u_0 + (u_0 - a)\ln(1-u_0/a) & (-a\ln(1-u_0/a) < t) \end{cases} \tag{3.43}$$

$$(0 < u_0 < a)$$

İlgili dönüşümleri yapabilmek için, önce (3.22) bağıntılarından gerekecek olanları bir kez daha yazalım:

$$p = \tau_u + z(\tau_u)$$
$$u = \tau_u - z(\tau_u)$$

verilen yörüngeden ilk bölgedeki denklem şu şekle gelir:

$$\left.\begin{aligned} p &= \tau_u + 0 = \tau_u \\ u &= \tau_u - 0 = \tau_u \end{aligned}\right\} p(u) = u \tag{3.44}$$

ikinci bölge için:

$$\begin{aligned} p &= \tau_u + ae^{-\tau_u/a} + \tau_u - a = 2\tau_u + ae^{-\tau_u/a} - a \\ u &= \tau_u - ae^{-\tau_u/a} - \tau_u + a = -ae^{-\tau_u/a} + a \end{aligned} \tag{3.45}$$

u için bulduğumuz eşitlikten iki sonuç çıkartabiliriz:

$$ae^{-\tau_u/a} - a = -u \tag{3.46}$$

ile

$$\frac{a-u}{a} = e^{-\tau_u/a}$$

$$1 - u/a = e^{-\tau_u/a}$$

$$\ln(1-u/a) = -\tau_u/a$$

$$\tau_u = -a\ln(1-u/a) \tag{3.47}$$

(3.46) ve (3.47)'de bulduklarımızı, (3.45)'teki p eşitliğinde yerine koyarsak:

$$p(u) = -2a\ln(1-u/a) - u \tag{3.48}$$

olmuş olur.

Üçüncü bölgeye geçersek:

$$\begin{aligned} p &= \tau_u + (u_0/a)\tau_u - u_0 + (u_0-a)\ln(1-u_0/a) = (1+u_0/a)\tau_u - u_0 - (1-u_0/a)\ln(1-u_0/a) \\ u &= \tau_u - (u_0/a)\tau_u + u_0 - (u_0-a)\ln(1-u_0/a) = (1-u_0/a)\tau_u + u_0 + (1-u_0/a)\ln(1-u_0/a) \end{aligned} \tag{3.49}$$

u için olan denklemden τ_u 'yu çekersek:

$$\tau_u = \frac{u - u_0 - a(1-u_0/a)\ln(1-u_0/a)}{(1-u_0/a)}$$

bulduğumuz bu değeri (3.49)'da, p denkleminde yerine koyarsak:

$$p(u) = \frac{1+u_0/a}{1-u_0/a}\left[u - u_0 - a(1-u_0/a)\ln(1-u_0/a)\right] + \frac{1-u_0/a}{1-u_0/a}\left[-u_0 - a(1-u_0/a)\ln(1-u_0/a)\right]$$

ve bir miktar sadeleştirme sonrasında buradan da:

$$p(u) = \left(\frac{a+u_0}{a-u_0}\right)u - 2a\ln(1-u_0/a) - \frac{2u_0}{1-u_0/a} \tag{3.50}$$

çıkar. (3.44), (3.48) ve (3.50) dönüşümlerini özetlersek:

$$p(u) = \begin{cases} u & (u<0) \\ -2a\ln(1-u/a) - u & (0<u<u_0) \\ \left(\dfrac{a+u_0}{a-u_0}\right)u - 2a\ln(1-u_0/a) - \dfrac{2u_0}{1-u_0/a} & (u_0<u) \end{cases} \tag{3.51}$$

Bu örnekte parçacık yaratılmış mıdır? Bunu anlamak için (3.40) veya (3.42) ile verilen enerji-momentum beklenen değerlerini hesaplayalım. Burada dikkat etmemiz gereken, ikinci bölge hariç, diğer bölgelerde, 2. türevin sıfır olacağı, dolayısıyla, enerji-momentum değerine bu bölgelerden bir katkı gelmeyeceğidir. Zaten, başlangıçta ve sonda statik bir uzay incelediğimizden, bu beklentimiz doğal karşılanmalıdır... İkinci bölgeye dair $p(u)$ fonksiyonunun türevlerini hesap edersek:

$$p'(u) = -\frac{u+a}{u-a}; \; p''(u) = \frac{2a}{(u-a)^2}; \; p'''(u) = -\frac{4a}{(u-a)^3}$$

Bu değerler denklemde yerlerine konursa:

$$\langle T_{00} \rangle = -\langle T_{01} \rangle = \frac{a(a-2u)}{12\pi(a^2-u^2)^2} \tag{3.52}$$

olarak bulunur. Yayımlanan toplam enerjiyi hesap etmek içinse ivmelenmenin olduğu bölgelere bakmalıyız. (3.43) yörünge denkleminden görüleceği üzere, üçüncü bölgede aynamız sabit (u_0 / a) hızıyla ilerlemektedir; bu yüzden bu bölgede bir yaratım olmasını bekleyemeyiz. O halde integralimizi $0 < t < -a\ln(1-u_0/a)$ aralığında, başka bir deyişle de $-\infty < u < u_0$ aralığında almamız gerekir. Buradan, toplam enerji:

$$\int_{-\infty}^{u_0} \langle T_{00} \rangle \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{u_0} \frac{a(a-2u)}{12\pi(a^2-u^2)^2} \mathrm{d}u \tag{3.53}$$

$$= -\frac{1}{48\pi a} \frac{a^2[\ln(a-u_0) - \ln(a+u_0)] - u_0^{\,2}[\ln(a-u_0) - \ln(a+u_0)] + 4a^2 - 2a\ln(a-u_0) - \ln(a+u_0)}{(a-u_0)(a+u_0)}$$

$$= \frac{1}{48\pi a}\left[\frac{(a^2-u_0^{\,2})\ln\left(\dfrac{a+u_0}{a-u_0}\right) + 4a^2 - 2au_0}{(a^2-u_0^{\,2})}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{u_0} \langle T_{00} \rangle \mathrm{d}u = \frac{1}{48\pi a}\left[\ln\left(\frac{a+u_0}{a-u_0}\right) + \frac{2a(2a-u_0)}{(a^2-u_0^{\,2})}\right] \tag{3.54}$$

bulunmuş olur. Dikkat edilirse, $(0 < u_0 < a)$ olduğundan ötürü, yayılan toplam enerji pozitif olacaktır.

IV. KÜRESEL AYNAYA GİRİŞ ---

Bu bölümde, temel olarak bir önceki bölümdeki çözüm metodlarının aynısını sırasıyla uygulamış olan Hadasz, Sadzikowski ve Wegrzyn'in (Hadasz, L., Sadzikowski, M., Wegrzyn, P. 1997) küresel ayna uygulamalarını kısaca tanıtacağız. Anderson ve Israel'in de belirttiği üzere (Israel, W., Anderson, W.G. 1999) Hadasz ve arkadaşlarının aşağıda özetini sunacağımız ilgili çalışması, sadece l = 0, yani "S-dalga" durumunu ele almalarından ötürü, aslında (3+1) uzayda, değil, (1+1) uzay için yapılan bir çalışmadır. Bu bitirme tezini hazırlayan tarafından, konunun bu yaz (2000) geliştirilmesi ve genelleştirilmesi planlanmaktadır. O yüzden, bu bölüm, sadece tanıtım olarak ele alınmalıdır.

Bir önceki bölümdeki aynanın benzeri olarak, incelediğimiz kürenin yüzeyini Σ ile gösterirsek, bu yüzey üzerinde alan dalga fonksiyonunun 0'a eşit olduğunu varsayalım:

$$\Phi\big|_{\Sigma} = 0 \tag{4.1}$$

Böylelikle, artık, küremizin bir "ayna" olduğunu söyleyebiliriz. Kolaylık olsun diye, aynanın başlangıçta ve bitişte duruyor olduğunu düşünelim. Bu durumda, yarıçapın zamana göre değişimi:

$$R = \begin{cases} R_0 & t \le 0 \\ R(t) & 0 \le t \le t_1 \\ R_1 & t_1 \le t \end{cases} \tag{4.2}$$

fonksiyonu ile verilebilir. Küresel simetri mevcut olduğundan, d'Alambert denklemini, çarpanlara ayırma metodu ile çözebiliriz:

$$\Box\Phi = 0 \tag{4.3}$$

$$\Phi(t,\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm}\Phi_l(t,\vec{r})Y_{lm}(\theta,\varphi) + k.e. \tag{4.4}$$

Yukarıdaki denklemde (4.3)'te yerine yazılırsa (katsayıların ve küresel harmoniklerin sadeleştirilmesinden sonra):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Phi_l(t,\vec{r}) = 0 \tag{4.5}$$

İşlemleri sadeleştirmek için l = 0, yani bir başka deyişle $\Phi(t,\vec{r}) = \Phi(t,r)$ alınırsa, denklemin genel çözümü

$$\Phi_l(t,r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \beta(\omega)\, e^{-i\omega t}\, \psi_\omega(t,r) + k.e. \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\Delta r &= r - R_0 \\ \delta_R &= 2\left[R\left(\tau_R\right) - R_0\right]\end{aligned} \tag{4.7}$$

olmak üzere,

$$\psi_\omega(t,r) = \frac{1}{2ir}\left[e^{i\omega(\Delta r - \delta_R)} - e^{-i\omega\Delta r}\right] \tag{4.8}$$

olarak tanımlanmıştır (*bir önceki bölümdeki* (3.22) *ve* (3.23) *bağıntıları*). $\beta(\omega)$ ise keyfi bir fonksiyondur. Önceki bölümde kurulan bağıntılara devam edilirse:

$$r - R(t_R) = t - t_R \tag{4.9}$$

olacaktır. Eğer, III. bölümde açıklanan biçimde, yaratma ve yok etme operatörleri vasıtasıyla, olası modlar kümesini kuantum operatörü olarak inşa etmek istersek, (küresel uzayda çalıştığımızı belirtmek amacıyla, yaratma ve yok etme operatörlerini bu bölümde sırasıyla, $b_\omega^\dagger$ ve b_ω olarak adlandıracağız)

$$\hat{\Phi}_{in}(t,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}}\left[b_\omega e^{-i\omega t} + b_\omega^\dagger e^{iwt}\right]\psi_\omega^{(0)}(r) \tag{4.10}$$

$$\psi_\omega^{(0)}(r) = \frac{\sin(\omega\Delta r)}{r} = \psi_\omega(t,r), \qquad (t \le 0) \tag{4.11}$$

$0 \le t \le t_1$ iken (4.10) fonksiyonu

$$\hat{\Phi}_{in}(t,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}}\left[b_\omega e^{-i\omega t}\psi_\omega(r) + b_\omega^\dagger e^{iwt}\psi_\omega^*(r)\right] \tag{4.12}$$

halini alır. Artık, enerji-momentum tansörünün bileşenlerini yazabiliriz:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right] \tag{4.13}$$

$$T_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \tag{4.14}$$

Bundan sonraki işlemler de, geçen bölümde yürütülen işlemlerin benzeridir. Verilen bir zamana bağlı yarıçap fonksiyonu, noktasal ayna yörüngesinde olduğu gibi, (4.7) ve (4.9) bağıntıları kullanılarak, dönüşüme tabi tutulup, gecikmiş zaman τ_R hesaplanıp, buradan (bir önceki bölümdeki $p(u)$'ya karşılık olarak)

$$R(u) = R\left(\tau_R(u)\right), \qquad [u = t - r]$$

fonksiyonu bulunur, ve beklenen değerler, bu fonksiyonun türevleri vasıtasıyla elde edilir.

V. SONUÇ, ÖNERİ VE YORUMLAR --

Ağırlıklı olarak (1+1) uzay-zaman boyutlarında ele aldığımız uzayımızda, hareket eden aynaların denklemlerini inceledik. II. bölümde ele çözümlediğimiz uzayda, III. ve, kısmen de olsa, IV. bölümlerdeki çalışmalarımız sonucunda, aynanın ancak ivmeli bir hareket sözkonusu olduğu durumlarda parçacık yaratımının gerçekleştiğini belirleyip, bunu saptamanın iki yolu olan Bogolubov katsayılarının hesaplanması ve enerji-momentum tansörünün yardımıyla, enerji ve momentum yoğunluklarının hesaplanması metodlarını açıklamaya çalıştık. Yaratılan parçacıkları saptamakta kullanılan detektörlerin cinslerine ve çalışma prensiplerine, çok geniş bir konu olduğu için ve tezin incelediği alanı saptıracağından ötürü, giremedik (detektörlere dair geniş bilgi Unruh, W.G., Wald R.M. 1984'te bulunabilir). Bu teze, kısa bir süre içerisinde yazımına başlanması beklenen bir çalışmada yararlanılacak olan kavramların toplu bir hali olarak bakılabilir. Nitekim, tezin yazarı, kısa vadede, küresel aynaların genelleştirilmiş formülasyonu, uzun vadede ise, kara delikler tarafından yayımlanan ışımaların entropiyle olan ilişkisi üzerine çalışmalar yapmayı düşünmektedir. Bu amaçla, tez, yeni fikirlerin sunulduğu bir çalışmadan ziyade, varolan düşüncelerin incelenip, aralarında bağların kurulduğu bir kaynak olarak ele alınmalıdır.

A. EK: HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR --

$$x(1-x)y''(x)+\left[c-\left(a+b+1\right)x\right]y'(x)-ab\,y(x)=0 \tag{A.1}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü gerçekleyen hipergeometrik fonksiyonlar, aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$y(x)={}_2F_1(a,b,c;x) \tag{A.2}$$

ve şu şekilde tanımlanır ($c\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere):

$${}_2F_1(a,b,c;x)=1+\frac{ab}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+... \tag{A.3}$$

Hipergeometrik fonksiyonlar, $|x|<1$ veya $x=1,\ c>a+b$ ve $x=-1,\ c>a+b-1$ için yakınsaktırlar.

$$\left(a\right)_n=a(a+1)(a+2)...(a+n-1)=\frac{\left(a+n-1\right)!}{\left(a-1\right)!} \tag{A.4}$$

olmak üzere, *Pochammer Sembolü* tanımlanırsa, ${}_2F_1(a,b,c;x)$ fonksiyonu, daha sade bir biçimde temsil edilebilir:

$${}_2F_1(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n\left(b\right)_n}{\left(c\right)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{A.5}$$

"${}_iF_j$" ile belirtilen bir hipergeometrik fonksiyonda, *i* indisi paydaki, *j* indisi ise paydadaki Pochammer Sembol sayısını gösterir. Bunun dışında, indissiz gösterimde ise, paya ve paydaya gelecek olan terimler, birbirlerinden noktalı virgüller vasıtasıyla ayrılırlar. Fonksiyonda, pay ve paydadaki sembollerin kendi aralarında simetri vardır.

Hipergeometrik fonksiyonlar arasında, aşağıdaki temel dönüşüm bağıntısı vardır:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b,c;x)&=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}\,{}_2F_1(a,b,1+a+b-c;1-x)\\&+\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(a+b-c\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}\left(1-x\right)^{c-a-b}\\&\times{}_2F_1(c-a,c-b,1+c-a-b;1-x)\end{aligned} \tag{A.6}$$

B. KAYNAKÇA ---

Anderson, W.G., Israel, W.	Phys. Rev. D **60,** 084003, 1999
Bayın, Selçuk Ş., Özcan, Mustafa	J. Math. Phys. **38**, 5240, 1997
Birrell, N.D., Davies, P.C.W.	Quantum Fields in Curved Space, 1982 (Cambridge University Press)
Davies, B.	J. Math. Phys. **13**, 1324, 1972
Davies, P.C.W., Fulling, S.A.	Proc. R. Soc. London **A356**, 237, 1977
Davies, P.C.W., Fulling, S.A., Unruh, W.G.	Phys. Rev. D **13**, 2720, 1975
Dereli, Tekin	Bilim ve Teknik, 54, Şubat 2000
Ford, L.H.	Proc. R. Soc. London **A364**, 227, 1978
Fulling, S.A., Davies, P.C.W.	Proc. R. Soc. London **A348**, 393, 1976
Hadasz, L., Sadzikowski, M., Wegrzyn, P.	hep-th/9803032, 1997
Hawking, S.W.	Commun. Math. Phys. **43**, 199, 1975
Hortaçsu, Mahmut	Doktora Programı Ders Notları, 1990 (Neşe Özdemir tarafından kaydedilmiştir)
Jones, S.	theory.ph.man.ac.uk/~jones/webtext/node1.html, 1997
Mathews, J., Walker, R.L.	Mathematical Methods of Physics, 1965 (W.A. Benjamin, Inc.)
Mazzitelli, F.D., Paz, J.P., Castagnino, M.A.	Phys. Let. B **189**, 132, 1987
Nicolaevici, N.	gr-qc/9910098, 2000
Özdemir, Neşe	"Küresel Dalgalarda Vakum Dalgalanmaları" Başlıklı Doktora Tezi, 1994
Razavy, M., Terning, J.	Phys Rev. D **31**, 307 1985
Unruh, W.G., Wald, R.M.	Phys. Rev. D **25**, 942, 1981
Walker, W.R.	Phys. Rev. D **31**, 767, 1985

Faydalanılan Programlar : Microsoft Office 97; Adobe Acrobat 4.0; Waterloo MapleV; MathSoft Mathcad 7; Design Science MathType 4.0b.

C. ÖZGEÇMİŞ --

Emre Sururi Taşcı, 1977 yılında İstanbul'da doğmuş, orta ve lise öğrenimini Özel Boğaziçi Koleji'nde tamamlayıp, 1994 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği bölümüne girmiştir. Fiziğin "matematiksel fizik" dalıyla ilgilenmekte olup, alan teorileri konusunda öğrenimini devam ettirmeyi düşünmektedir. http://epigraf.fisek.com.tr adresindeki edebiyat içerikli sitesinden, kendisi ile ilgili güncel bilgilere ulaşılabilir. Yapmış olduğu fizik çalışmaları arasında, "Michelson-Morley deneyinin anti-relativistik, klasik fizik yoluyla inceleme ve eleştirisi", "Sonsuz Uzunluktaki Potansiyel Kuyularında Yansıma Katsayısının 1 Olmasına Rağmen Dalga Fonksiyonunun Varlığı" ve "Karacisim Işıması ve Isıl Radyasyon Teorisine Dair Deneyler / Planck, Wien ve Rayleigh-Jeans Dağılımlarının Tarihsel Önemi" başlıklı çalışmaları sayılabilir.

Bitirme tezinin bu sürümüne yapılan güncellemeler:

Emre S. Taşcı, 16.06.2000 tarihi itibarıyla bitirme tezinin savunmasını yapmış ve jüri tarafından "AA" notu verilerek başarılı bulunmuştur. Bu tarihten bir hafta sonra ise, "2.83" not ortalamasıyla İstanbul Teknik Üniversitesi'nin Fizik Mühendisliği bölümünden mezun olmuştur.